Name.................................... Vorname......................... Sem-Gr...........

Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Dr. Hentzschel

Juli 2006

Beleg II "Drehmatrix"

(Bauingenieurwesen IJ 2005)

Gegeben ist eine Drehung D des $\mathbf{R}^3$ durch ihren Drehachs-Ortsvektor $d=(d_1, d_2, d_3)^T$ mit $|d|=1$ und ihren Drehwinkel φ. Gesucht ist die Matrix D, die diese Drehung als lineare Abbildung $D:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ beschreibt. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

a) Begründen Sie, dass bei einer (jeden) linearen Abbildung $A:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ das Bild der Einheitsvektoren e_i des $\mathbf{R}^n$ die i-ten Spaltenvektoren von A sind.

b) Folgern Sie aus a), dass bei einer Drehung (des $\mathbf{R}^3$) die Spaltenvektoren der Drehmatrix D orthonormal sind. Schließen Sie daraus, dass D eine orthogonale Matrix sein muss (das heißt es gilt $D^{-1}=D^T$).

c) Zerlegen Sie die Matrix D in ihren symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil B und C, also D=B+C (vergl. Ü3, 1.4.4a).

d) Folgern Sie aus $D\cdot d = D^{-1}\cdot d = d$ die Beziehung $C\cdot d=0$ (d Drehachsvektor).

Setzen Sie $C = \begin{matrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{matrix}$ an und berechnen α, β und γ aus d_1, d_2 und d_3.

e) Ein beliebiger Vektor r wird gemäß $r = b + c$ mit $b=(r\cdot d)\cdot d$ zerlegt. Interpretieren Sie diese Zerlegung anhand einer Skizze. Wie bezeichnet man üblicherweise den Vektor b?

f) Fertigen Sie eine Skizze an, die c, $D\cdot c$ und $D^{-1}\cdot c$ enthält, und heben dort den Drehwinkel φ hervor. Es sei $\delta\cdot c$ die Projektion von $D\cdot c$ auf c. Geben Sie $\delta\cdot c$ als Linearkombination von $D\cdot c$ und $D^{-1}\cdot c$ an und bestätigen $\delta = \cos(\varphi)$.

g) Leiten Sie aus e) und f) die Beziehung $B\cdot r = \delta\cdot r + (1-\delta)\cdot b$ ab.

h) Setzen Sie für r nacheinander die Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 ein und folgern $Be_i = \delta\cdot e_i + (1-\delta)\cdot d_i\cdot d$ (i=1,2,3) und daraus

$$B = \delta\cdot \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} + (1-\delta)\cdot \begin{matrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{matrix}$$

i) Setzen Sie aus c), d) und h) das vorläufige Ergebnis zusammen

$$D = \delta\cdot \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} + (1-\delta)\cdot \begin{matrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{matrix} + \rho\cdot \begin{matrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{matrix} ,$$

wobei ρ eine reelle Zahl ist.

j) Begründen Sie mit Hilfe der Orthogonalität von D die Beziehung $\rho = \sin(\varphi)$, indem Sie etwa das Skalarprodukt der ersten mit der zweiten Spalte von D ausrechnen.

k) Zahlenbeispiel: Gegeben sind die drei Drehmatrizen

Variante 1: Variante 2: Variante 3:

$$D_1 = 3^{-1}\cdot \begin{matrix} 1 & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{matrix} \quad D_2 = 4^{-1}\cdot \begin{matrix} 2+\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{matrix} \quad D_3 = 18^{-1}\cdot \begin{matrix} 10 & 2-18\sqrt{3} & 2+18\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{18} & 13 & 4-9\sqrt{3} \\ 2-18\sqrt{3} & 4+9\sqrt{3} & 13 \end{matrix}$$

Berechnen Sie die Drehachsen d und die Drehwinkel φ zu den jeweiligen Drehungen.

Belegvarianten gemäß der Anfangsbuchstaben Ihres Familiennamens:

1) Variante 1 **(A – H)** 2) Variante 2 **(I – O)** 3) Variante 3 **(P – Z)**

Abgabe: **Donnerstag, 6.7.06**